

# Los sistemas dinámicos discretos

Fátima Pardo y Luis Mendoza

Departamento de Biología Molecular y Biotecnología

Cambia lo superficial  
Cambia también lo profundo  
Cambia el modo de pensar  
Cambia todo en este mundo

*Todo cambia* (fragmento), de Julio Numhauser

Resulta evidente que todo a nuestro alrededor se encuentra en cambio constante. Y por tanto, quienes nos dedicamos a la investigación biológica nos enfrentamos ante una serie de fenómenos que tienen variaciones a lo largo del tiempo, como la reacción de un organismo ante un estímulo, la propagación de una enfermedad, el proceso de activación transcripcional de un gen, el tamaño de una población bacteriana, etcétera. No es de extrañar entonces, que existan múltiples proyectos de investigación enfocados a estudiar las propiedades dinámicas de algunos fenómenos biológicos.

Para enfocarse en la descripción del comportamiento dinámico de algún sistema biológico, es necesario utilizar una herramienta formal que permita hacer una simplificación del sistema, tomando la parte dinámica e ignorando características tales como la composición o la forma del sistema en estudio. Es decir, se requiere de la creación de un modelo dinámico del sistema en estudio. Para ello, dentro de las matemáticas existe una serie de herramientas conocidas como sistemas dinámicos, los cuales no son sino una manera de describir cómo un sistema pasa de un estado a otro conforme transcurre el tiempo.

Existen diversos tipos de sistema dinámico, pero todos ellos se pueden dividir en dos grandes grupos: los sistemas continuos y los sistemas discretos. Dichas denominaciones provienen del tipo de variable utilizada para describir al tiempo, ya sea con una variable continua (esto es, que puede tomar como valor un número real), o con una variable discreta (que puede tomar como valor un número racional). Cada uno de estos sistemas tienen una gran cantidad de propiedades que sería muy largo enumerar en este espacio. Por ello, mostraremos de manera ejemplificada sólo un puñado de características de los sistemas dinámicos discretos, los cuales son los más sencillos de explicar.

El primer uso que se le dio a los sistemas dinámicos discretos en la biología, fue para la descripción del cambio del tamaño en poblaciones. En el caso más sencillo, podemos suponer que la población de un organismo determinado da origen a una cierta cantidad de descendientes en un tiempo dado. Si describimos el número de individuos en la población original como  $N_0$ , y su tasa de crecimiento por unidad de tiempo como  $r$ , entonces podemos describir que en la siguiente unidad de tiempo la población tendrá un tamaño de  $N_1=rN_0$ , es decir, la cantidad de individuos que tenemos se multiplicará  $r$  en una unidad de tiempo. Asimismo, es fácil ver que la cantidad de individuos que tenemos en el presente depende del número de estos que haya en el tiempo anterior.

Ahora bien, si vemos como cambia dicha población conforme avanza el tiempo, aplicando varias veces la misma fórmula podemos ver que:

$$\begin{aligned} N_1 &= rN_0 \\ N_2 &= rN_1 = r(rN_0) = r^2N_0 \\ N_3 &= rN_2 = r(rN_1) = r(r(rN_0)) = r^3N_0 \\ N_4 &= rN_3 = r(rN_2) = r(r(rN_1)) = r(r(r(rN_0))) = r^4N_0 \\ N_5 &= rN_4 = r(rN_3) = r(r(rN_2)) = r(r(r(rN_1))) = r(r(r(r(rN_0)))) = r^5N_0 \dots \end{aligned}$$

Claramente se ve que aparece un patrón:  $N_t = rN_{t-1} = r^t N_0$ . Esta fórmula quiere decir que el tamaño de la población en cualquier tiempo  $t$ , se puede obtener de multiplicar el tamaño inicial de la población por un factor. Con esta fórmula podemos seguir el comportamiento a través del tiempo del tamaño de una población.

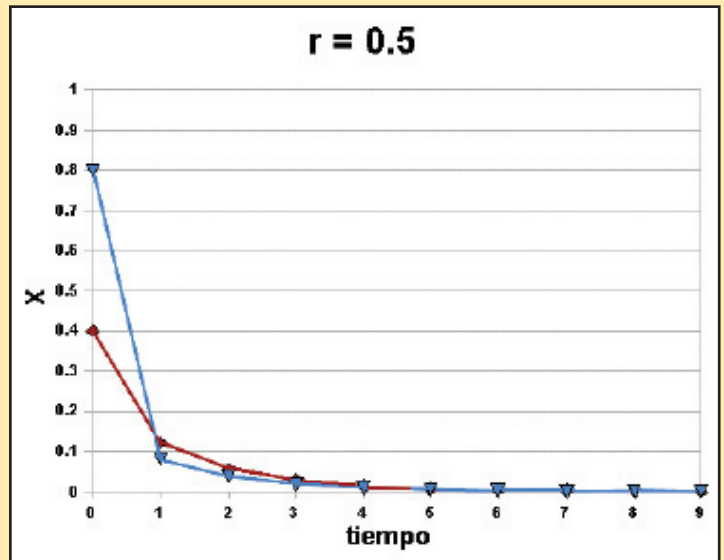


Figura 1

El modelo de crecimiento poblacional mostrado arriba es muy simple, y por tanto no muy realista, por lo que sirve sólo para describir algunos sistemas muy particulares como el crecimiento bacteriano en su fase exponencial. Para darle al modelo una aplicación más amplia, hay que incorporarle al modelo algunos factores que modifican la tasa del crecimiento, como lo puede ser la capacidad de carga del medio en donde vive dicha población. Para esto, vamos a suponer que la población tienen un valor máximo posible, debido a la finitud de alimento y espacio en el que crece. Además, para hacer más conveniente desde el punto de vista matemático al modelo, vamos a normalizar el tamaño de la población a 1. Es decir, en vez de utilizar el número de individuos en la población, utilizaremos la *proporción* de individuos con respecto a la capacidad de carga del sistema. El nuevo modelo queda entonces de la siguiente manera:

$$x_{t+1} = rx_t(1-x_t)$$

En donde  $x$  es el número de individuos divididos entre la capacidad de carga, y  $r$  continúa siendo la tasa de reproducción por unidad de tiempo. Este modelo, de apariencia tan simple, tiene un comportamiento lo suficiente complicado que le ha merecido un lugar en todos los libros de texto sobre sistemas dinámicos discretos y de biología teórica, y se le conoce como el mapa logístico.

Para poder apreciar el comportamiento del mapa logístico, graficaremos su comportamiento dinámico, es decir, presentaremos cómo cambian los valores de  $x$  al transcurrir el tiempo. Para ello, necesitamos especificar dos cosas, primero, un estado inicial del sistema, es decir el valor de  $x_0$ . Y segundo, es necesario especificar un valor para  $r$ .

Empecemos con un valor pequeño de  $r$ , por ejemplo de 0.5. La Figura 1 muestra en diferentes colores las trayectorias que tiene el sistema al comenzar con dos diferentes estados iniciales. Se pueden observar dos cosas; primero, que las trayectorias convergen conforme avanza el tiempo. Y segundo, que el sistema al principio tiene una serie de valores transitorios, y después el sistema se vuelve estacionario, es decir, que no se altera su estado conforme avanza el tiempo. Aquí introduciremos un nuevo término. Aquellos estados a los que converge un sistema a partir de diversos estados iniciales se le denomina *atractor*. Se le llama así porque pareciera que esa región parece “atraer” diversas trayectorias hacia sí. Por otra parte, cuando las trayectorias eventualmente se convierten en estacionarias, decimos que es un atractor de punto fijo. El nombre es porque el sistema es atraído hacia un solo punto en la variable dependiente, la  $x$  en este caso.

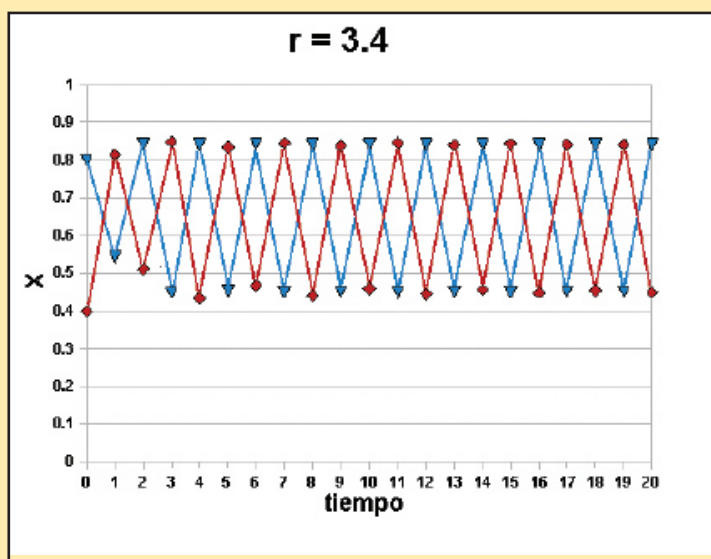


Figura 2

Hasta aquí, el modelo es bastante aburrido, ya que independientemente del valor del estado inicial, el sistema tiende a  $x=0$ , es decir, la población que estamos modelando se extingue. De hecho, el mismo comportamiento se obtiene para cualquier valor positivo de  $r$  menor que 1. Sin embargo, el modelo es mucho más complejo que eso. Veamos ahora que pasa cuando damos a  $r$  un valor más grande, digamos de 2.5. El resultado es que el sistema sigue teniendo un atractor de punto fijo, es decir que las trayectorias convergen hacia un mismo estado estacionario. En este caso, sin embargo, la población no se extingue como lo mostrado en la Figura 1, sino que se estabiliza en un tamaño determinado. Este comportamiento se sigue observando mientras el valor de  $r$  sea mayor a 1 y menor a 3.

Ahora las cosas van a comenzar a ponerse interesantes. Démosle a  $r$  un valor de 3.4, cuyos resultados se pueden ver en la Figura 2. Podemos ver esta vez un comportamiento nuevo, pues el sistema no llega a un estado estacionario, sino que permanece oscilando. En este caso hablamos que el sistema tiene un atractor de periodo 2, es decir que el estado del sistema se repite cada dos unidades de

tiempo. Por otra parte, nótese que diferentes estados iniciales llevan a diferentes trayectorias que parecen no convergir. Sin embargo, el sistema sí converge en el atractor, ya que la variable independiente termina repitiéndose en los mismos dos valores que se alternan conforme avanza el tiempo. De manera interesante, el periodo de los ciclos varía dependiendo del valor exacto del parámetro  $r$ . Para valores  $3 < r < 3.4495$  se forma un atractor cíclico con periodo 2; si  $3.4495 < r < 3.5441$  hay un ciclo de periodo 4; si  $3.5441 < r < 3.5644$  hay un ciclo de periodo 8; si  $3.5644 < r < 3.5688$  hay un ciclo de periodo 16 ... y así. Mientras el parámetro  $r$  se acerca más y más al valor 3.57, van apareciendo atractores cíclicos con periodos de forma  $2^n$ , en donde  $n$  es un número entero; en tanto que el rango de valores de  $r$  en donde existen atractores de un cierto periodo es cada vez más restringido. A este comportamiento se le conoce como la ruta al caos por la duplicación de periodo.

¿Por qué se llama ruta al caos? Veamos que pasa si utilizamos valores de  $r$  mayores a 3.57; por ejemplo, en la Figura 3 se muestra un caso donde  $r=4$ . A diferencia de los ejemplos anteriores en donde estados iniciales distintos convergen a un mismo atractor, en este caso diferentes estados iniciales llevan a distintos atractores (trayectorias negra y roja). Más aún, incluso si dos estados iniciales están muy cercanos uno de otro, eventualmente terminan en diferentes atractores (Figura 4, trayectorias naranja y azul), dando la falsa impresión de tener trayectorias aleatorias. Esta es una característica de los sistemas caóticos.

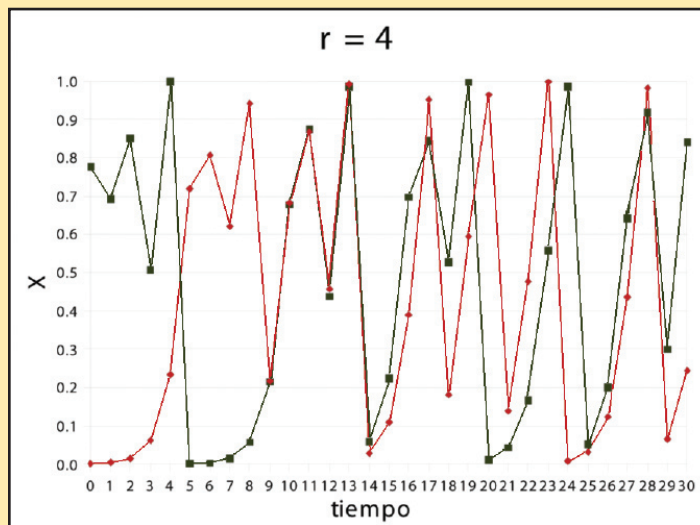


Figura 3

De manera sencilla, aunque poco formal, se puede decir que un sistema caótico es un sistema dinámico cuyas trayectorias son altamente sensibles a su estado inicial. De manera más formal, un sistema caótico presenta mezcla, tiene puntos periódicos densos, y tiene alta sensibilidad a las condiciones iniciales. La propiedad de mezcla quiere decir que si en vez de comenzar una trayectoria con un punto comenzamos con un intervalo (por ejemplo, todos los valores entre 0.555 y 0.556), las trayectorias terminarán por cubrir todo el intervalo de valores; es decir, todos los valores de  $x$  serían eventualmente visitados. La propiedad de tener puntos periódicos densos quiere decir que en cualquier intervalo de valores hay un número infinito de atractores periódicos como los que mencionamos en párrafos anteriores. Estas dos propiedades

Continúa en la pág. 14

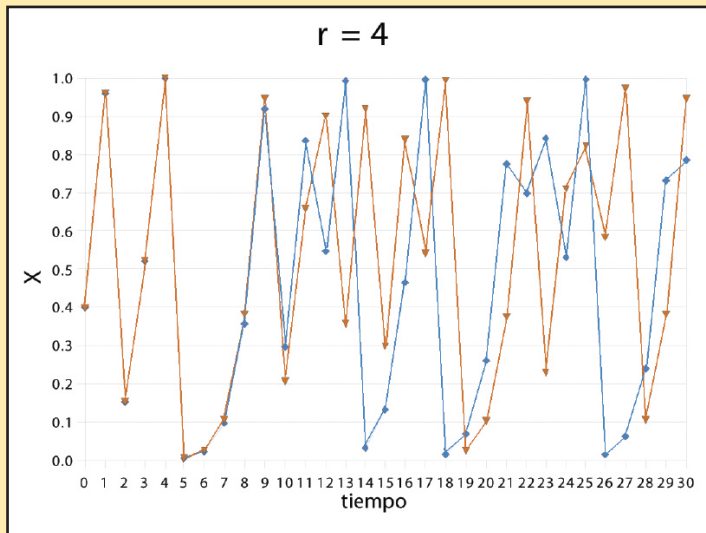



Figura 4

determinan a la tercera, la de alta sensibilidad al estado inicial, que quiere decir que dos puntos distintos, por más cercanos que estos se encuentren, eventualmente terminarán siguiendo trayectorias completamente distintas.

Recuerden que este comportamiento tan complejo, y caótico en el sentido formal de la palabra, se obtiene con el humilde mapa logístico, que contiene solo una variable, un solo parámetro, y el tiempo se toma como una variable discreta. A pesar de que únicamente nos hemos referido a poblaciones, los sistemas dinámicos discretos han sido utilizados para modelar una gran cantidad de fenómenos biológicos, como por ejemplo en la genética para modelar el cambio en la frecuencia de un gen; en la epidemiología para modelar la dispersión de enfermedades infecciosas; en la fisiología de plantas para describir la filotaxis; en la biología molecular para modelar las redes de señalización; en botánica para describir la dispersión de fuegos forestales; y en una larga lista de otros fenómenos, ¡incluyendo modelos socio-lógicos para predecir divorcios!

El mensaje con el que queremos que se queden después de leer este pequeño texto es el siguiente: si queremos modelar un sistema biológico que presenta un comportamiento complejo, no necesariamente debemos pensar automáticamente en una expresión matemática muy compleja. Existen muchas herramientas matemáticas, algunas de ellas muy sencillas, que pueden ayudarnos a describir el comportamiento altamente complejo de los sistemas biológicos. Además, la ventaja de tener un modelo matemático de un sistema biológico, es que nos permite hacer predicciones sobre el mismo, ayudando enormemente en la planeación de experimentos. 

## In Memoriam

Imgard Montfort 1926 - 2008

El sábado 9 de febrero falleció la doctora Irmgard Montfort Happel, una de las profesoras más queridas de la Facultad de Medicina y pionera en la investigación de colagenasas, fibrosis hepática y proteinasas amibianas. La doctora Montfort nació en Monterrey, Nuevo León el 23 de febrero de 1926, estudió la carrera de médico cirujano en la Facultad de Medicina de la UNAM, y realizó estudios de Posgrado de Patología Quirúrgica en la Washington University, St. Louis, Missouri, Estados Unidos. Fue profesora de la Facultad de Medicina desde 1957, cuando ingresó como médica investigadora a la Unidad de Patología; también formó parte del Instituto de Investigaciones Biomédicas (1968-1972) y del Instituto Nacional de la Nutrición "Salvador Zubirán" de la Secretaría de Salud (1974-1984).

Fue tutora y formó a un numeroso grupo de médicos e investigadores en el campo. Fue autora de más de 50 artículos científicos y nueve capítulos de libros. Se desempeñó como profesora visitante de la Escuela de Medicina de la Universidad de Harvard e investigadora asociada en el Robert Breck Brigham Hospital en Boston, Massachusetts, Estados Unidos.



Además de haber sido una distinguida investigadora, fue una profesora generosa, siempre dispuesta a enseñar y ayudar a los jóvenes, galardonada con los premios Aida Weiss y el premio Sor Juana Inés de la Cruz. Fue esposa del profesor emérito doctor Ruy Pérez Tamayo, madre de tres hijos Ruy, Isabel y Ricardo, abuela de cinco nietos Mariana, Ruy, Amanda, Daniel y Sebastián, y bisabuela de los tres adorables Julia, Alejandro y Ana. A pesar de su intensa vida académica siempre tuvo mucho tiempo y cariño para apoyar y consentir con generosidad a su gran familia biológica y aún más grande familia académica.

Poseedora de una enorme cultura y una melómana, cuyo gusto por la música persistió hasta el final; sólo dejó de acudir a los conciertos sabatinos de la Orquesta Filarmónica de la UNAM dos semanas antes de su muerte, cuando el enfisema pulmonar y la insuficiencia cardiaca ya no le permitieron someterse al esfuerzo que representaba asistir a los conciertos. Su espíritu y sus enseñanzas seguirán con nosotros. La extrañaremos mucho ¡ahora y siempre!

Querida madre, amiga y maestra, descansa en paz.

Ingeborg Becker

Facultad de Medicina

Fotografía de Ruy Pérez Tamayo e Irmgard Montfort Happel en 1956.

Tomada de Memorias del jubileo del IIB.

